

LISTA 1

Números Reais

Exercício Aula

1 — Mostre o Princípio da Indução Matemática a partir do Princípio da Boa Ordem.

2 — Mostre que não existe nenhum número inteiro entre n e $n + 1$.

3 — Mostre que $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

4 — A partir de $a \in \mathbb{Z}$, postule seu elemento inverso tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. Defina, a partir dos inteiros e de seus elementos inversos, o produto $a \cdot b^{-1}$ e derive a soma $a \cdot b^{-1} + c \cdot b^{-1}$.

Corpo

5 — Mostre que num corpo valem:

- a** $-0 = 0$.
- b** $1^{-1} = 1$.
- c** Zero não admite recíproco.
- d** Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.
- e** Se $a \neq 0$, então $(a^{-1})^{-1} = a$.
- f** $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.
- g** $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$
- h** $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
- i** $-(a - b) = -a + b$.
- j** Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

6 — Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dados $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, definimos a soma e o produto, respectivamente, como:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \stackrel{\text{def}}{=} (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo.

7 — Seja $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais, pode ser descrito como $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, quando visto como conjunto. As operações neste corpo são definidas da seguinte forma: a soma de dois elementos $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e o produto $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy')$. O elemento neutro da adição é $(0, 0)$ e o neutro da multiplicação é $(1, 0)$. Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ é um corpo.

Corpo Ordenado

8 — Mostre que num corpo ordenado completo valem as seguintes afirmações:

- a** Não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.
- b** A soma de dois números negativos é um número negativo.
- c** Se $a > 0$, então $1/a > 0$, se $a < 0$, então $1/a < 0$.
- d** Se $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
- e** Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.
- f** Para números reais a e b quaisquer tem-se $a^2 + b^2 \geq 0$. Se a e b não são ambos 0, então $a^2 + b^2 > 0$.

NÚMEROS REAIS E SEQUÊNCIAS

- [g]** Se x verifica $0 \leq x < h$ para todo o número real positivo h , então $x = 0$.

9 — Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ não é um corpo ordenado.

Indução

10 — Prove que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

11 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

12 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13 — Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

14 — Prove que $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, quando $r \neq 1$.

Corpo ordenado completo

15 — Seja $X = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. Prove que $\inf X = 0$.

16 —

- [a]** Se x e y são números reais quaisquer com $x < y$, prove que existe pelo menos um número real z tal que $x < z < y$.
- [b]** Se x é um número real arbitrário, prove que existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.
- [c]** Se $x > 0$, prove que existe um inteiro positivo n tal que $1/n < x$.

- [d]** Se x é um número real arbitrário, prove que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $n \leq x < n+1$. Este n é chamado a parte inteira de x e representa-se por $[x]$.

17 — Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado superiormente, e c um número real. Tem-se $c \leq \sup X$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ real dado pode-se achar $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncie e demonstre um resultado análogo com ínfimo em vez de supremo.

18 — Seja $I = [0, 1)$. Prove que $\sup I = 1$.

19 — Sejam $A \subset B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

20 — Dado $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente, seja $-A = \{-x; x \in A\}$. Prove que $-A$ é limitado superiormente e que $\sup(-A) = -\inf A$.

21 — Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $c \cdot A = \{c \cdot x; x \in A\}$. Prove que $c \cdot A$ é limitado e que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$. Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

*** 22 —** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita limitada quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

- [a]** Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$.
- [b]** Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$
- [c]** Conclua que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.

- d Considerando as funções $f, g : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que se pode ter $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

23 — Sejam A e B conjuntos de números reais po-

sitivos. Definimos

$$A \cdot B = \{x \cdot y; x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Prove que se A e B forem limitados então $A \cdot B$ é limitado, sendo $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ e $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.